

Programme de colle n°2

semaine du 21 au 25 septembre

Notions vues en cours

Chapitre 3 – Somme et produits

- Sommes et produits de réels $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$: notations $\sum_{i=m}^n a_i$ et $\prod_{i=m}^n a_i$, l'indice de sommation est une variable muette
- Sommes usuelles : $\sum_{k=p}^q 1$, $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n q^k$, somme de termes consécutifs d'une suite géométrique
- Linéarité de $\sum$, propriétés équivalente pour $\prod$, "relation de Chasles", sommes et produits télescopiques
- Changement d'indice dans une somme, symétrisation
- Factorisation de $a^n - b^n$: il faut savoir l'appliquer rapidement pour de petites valeurs de n en reconnaissant le "motif"
- Famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels indexée par un ensemble I (dans ce chapitre, on supposera l'ensemble $I \subset \mathbb{N}$ et I fini), notations $\sum_{i \in I} a_i$ et $\prod_{i \in I} a_i$, conventions $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$ et $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$, notations étendues comme $\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^n (\dots)$
- Factorielle, coefficient binomial $\binom{n}{k}$: définition, symétrie, triangle de Pascal. Par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$. Il faut savoir calculer $\binom{n}{k}$ rapidement pour de petites valeurs de k et/ou de n en reconnaissant le "motif"
- Binôme de Newton : il faut connaître la formule et savoir l'appliquer rapidement pour de petites valeurs de la puissance. Il faut savoir appliquer rapidement le binôme pour de petites valeurs de n en reconnaissant le "motif"
- Sommes doubles : notations $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$, sommes doubles rectangulaires et triangulaires, formule d'interversion des $\sum$ dans une somme double, formule de découplage $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_i c_j) = \left(\sum_{i=1}^m b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)$.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres 1 à 3).

Questions de Cours.

[Exporter
\(LaTeX\)](#)

Q1

- Définition du coefficient binomial.
Chapitre 3, Sous-section 2.1
- Énoncer et démontrer le théorème du triangle de Pascal.
Chapitre 3, Théorème 3.18
- Énoncer sans démonstration le théorème du binôme de Newton.
Chapitre 3, Théorème 3.19
- Factoriser $a^n - b^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur (par exemple 4 ou 5).

[Exporter
\(LaTeX\)](#)

Q2

- Énoncer et démontrer le théorème de factorisation de $a^n - b^n$.
Chapitre 3, Théorème 3.13
- Développer $(a + b)^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur (par exemple 4 ou 5).

[Exporter
\(LaTeX\)](#)

Q3

TD 3, Exercice 14 (tronqué) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

- (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- (b) En déduire S_n .

Les questions flash sont en page suivante

Chapitre 3 :

- Compléter les formules $\sum_{k=1}^n k = \dots$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$
- Compléter la formule $a^n - b^n = \dots$
- Factoriser $a^n - b^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur.
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$
- Recopier et compléter les formules correctes, et seulement celles-là :

$$\sum (a_i + b_i) = \dots \quad \sum a_i b_i = \dots \quad \sum \lambda a_i = \dots \quad \sum a_i^\lambda = \dots$$

$$\prod (a_i + b_i) = \dots \quad \prod a_i b_i = \dots \quad \prod \lambda a_i = \dots \quad \prod a_i^\lambda = \dots$$

(on s'autorise ici à ne rien mettre au-dessus et en-dessous des symboles $\sum$ et $\prod$)

- Réaliser un changement d'indice donné dans une somme donnée par l'examineur. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{k}{n+k} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots \quad \text{avec } j = k + n$$

- Donner la définition de $\binom{n}{k}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = \dots$
- Développer $(a+b)^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur.
- Compléter : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$
- Compléter : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$

Chapitre 2 :

- Compléter : $\forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots \quad \text{et} \quad \forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots$
- Sous quelle condition sur les réels a et b peut-on écrire " $a = b \iff a^2 = b^2$ " ?
- À quelle condition peut-on appliquer une fonction f des deux côtés d'une inégalité $a \leq b$ et quelle inégalité obtient-on ?
- Dessiner le graphe de la fonction partie entière.
- Soit x et y deux réels et k un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\lfloor x + y \rfloor = \dots \quad \lfloor x + k \rfloor = \dots \quad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$

- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.
- Étant donné deux réels quelconques, comment définit-on la distance qui les sépare ?

Chapitre 1 :

- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " $P \implies Q$ ".
- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " P ou Q ".
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une caractérisation de " n est impair" en termes de quantificateurs.
- Donner la négation d'une assertion choisie par l'examineur, par exemple " $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad y = 0$ ou $n \leq y$ ".
- Qu'appelle-t-on la contraposée de l'assertion " $P \implies Q$ " ? Quel est son lien logique avec l'assertion " $P \implies Q$ " ?
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence forte. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- Quel raisonnement utiliseriez-vous pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel ?

Annexe : code LaTeX des exercices à copier-coller

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Définition du coefficient binomial.\\
\item Énoncer et démontrer le théorème du triangle de Pascal. \\
\item Énoncer sans démonstration le théorème du binôme de Newton. \\
\item Factoriser  $\boldsymbol{a^n-b^n}$  pour une petite valeur de  $n$ , fixée par
    l'examineur (par exemple 4 ou 5).
\end{itemize}
```

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Énoncer et démontrer le théorème de factorisation de  $a^n-b^n$ . \\
\item Développer  $\boldsymbol{(a+b)^n}$  pour une petite valeur de  $n$ , fixée par
    l'examineur (par exemple 4 ou 5).
\end{itemize}
```

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\left[S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \right]$

```
\begin{enumerate}
\item Démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k \leq n$ , on a
    
$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

\item En déduire  $S_n$ .
\end{enumerate}
```